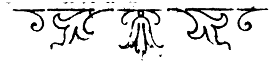

AsLn
3069
07
WIDENER LIBRARY
HX DCV2 M
Digitized by Google



С. Д. Черный.

О числѣ возможныхъ рѣшеній задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ по способу Ольберса.





КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра Акціон. О-ва печ. и издат. дѣла Н. Т. Корчакъ-Новицкаго, Меринговская № 6.
1907.

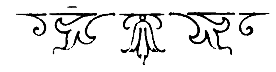
С. Д. Черный.

О ЧИСЛѢ ВОЗМОЖНЫХЪ РѢШЕНІЙ

ЗАДАЧИ

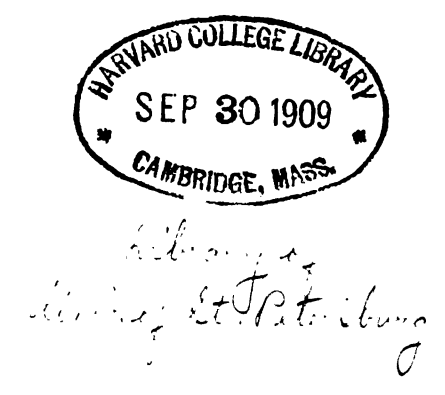
О ВЫЧИСЛЕНІИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХЪ ОРБИТЪ

ПО СПОСОБУ ОЛЬБЕРСА.





КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра Акціон. О-ва печ. и издат. дѣла Н. Т. Корчакъ-Новицкаго, Меринговская № 6.
1907.



Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра.
Оттискъ изъ Университетскихъ Извѣстій за 1907 годъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Введеніе 1

I. Выводъ приближеннаго разрѣшающаго уравненія для опредѣленія геоцентрическаго разстоянія кометы 5

II. Опредѣленіе по способу Оппольцера числа положительныхъ корней разрѣшающаго уравненія для вычисленія геоцентрическаго разстоянія кометы 15

III. Изслѣдованія Л. Пикара 22

IV. Обобщеніе метода Лежандра. 29

V. Выводъ уравненія для опредѣленія истиннаго геліоцентрическаго разстоянія кометы въ моментъ второго наблюденія. . . 37

VI. Общее заключеніе 40

Указатель литературы 43

ВВЕДЕНІЕ.

Въ 1797 году Ольберсъ въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen“ далъ способъ для вычисленія параболическихъ орбитъ кометъ. Идея этого способа заключается вкратцѣ въ слѣдующемъ: подставивъ геоцентрическія координаты кометы и солнца въ выраженія для геліоцентрическихъ радіусовъ векторовъ кометы въ моменты перваго и третьяго наблюденій, получимъ выраженія радіусовъ векторовъ въ функціи отъ полученныхъ по даннымъ наблюденій широтъ и долготъ крайнихъ положеній кометы и соотвѣтственныхъ геоцентрическихъ разстояній кометы. Затѣмъ выражаемъ хорду, соединяющую два крайнихъ положенія кометы на ея параболической орбитѣ, въ функціи тѣхъ же самыхъ геоцентрическихъ разстояній. Такимъ образомъ мы получимъ три уравненія съ пятью неизвѣстными, а именно: двумя радіусами векторами, хордой и двумя геоцентрическими разстояніями кометы. Но, такъ какъ движеніе кометы происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ центръ солнца, то мы получимъ еще одно соотношеніе между двумя крайними геоцентрическими разстояніями кометы, содержащее данныя трехъ полныхъ наблюденій; наконецъ, изъ условія, что комета движется по параболѣ, мы получимъ такъ называемое уравненіе Эйлера, выражающее зависимость между двумя крайними радіусами векторами, хордой, соединяющей крайнія положенія кометы и промежуткомъ времени между крайними наблюденіями кометы. Изъ полученныхъ пяти уравненій опредѣляемъ неизвѣстныя, которыя въ связи съ наблюденными угловыми координатами кометы, дадутъ намъ возможность опредѣлить элементы параболической орбиты кометы.

Система пяти уравненій съ пятью неизвѣстными, отъ рѣшенія которой зависитъ рѣшеніе задачи о вычисленіи элементовъ орбиты кометы, настолько сложна, что можетъ быть рѣшена только пробами. Такой путь

рѣшенія предыдущей системы уравненій не могъ бы привести ни къ какимъ недоразумѣніямъ, если бы неизвѣстныя изъ этой системы уравненій опредѣлялись однозначно. Но не трудно видѣть, не производя вычисленій на самомъ дѣлѣ, что предыдущая система уравненій, по исключеніи четырехъ неизвѣстныхъ, привелась бы къ одному ирраціональному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ; приведя послѣднее уравненіе къ раціональному виду, мы получили бы уравненіе очень высокой степени, которое, вообще говоря, могло бы имѣть нѣсколько положительныхъ корней, изъ которыхъ только одинъ, очевидно, соотвѣтствовалъ бы истинной орбитѣ свѣтила. Поэтому, при рѣшеніи предыдущей системы уравненій пробами, не можетъ быть увѣренности, что мы нашли корень, соотвѣтствующій истинной орбитѣ кометы.

Позднѣйшіе ученые Гауссъ, Энке, Бессель и др., занимавшіеся усовершенствованіемъ способа Ольберса, не обратили вниманія на только что указанный недостатокъ при рѣшеніи системы уравненій пробами. Только Оппольцеръ впервые въ 1882 году обратилъ вниманіе на многозначность рѣшенія задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ.

Въ своемъ сочиненіи „Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten“ (I Band. 1882), на стр. 308 онъ вывелъ уравненіе

$$\alpha^2 x^2 - 2\alpha\, cs\,\varphi\, x + 1 = \frac{4R_2^2}{\sqrt{x^2 - 2x\cos\psi_2 + 1}},$$

число положительныхъ корней котораго даетъ число рѣшеній задачи объ опредѣленіи параболической орбиты кометы по способу Ольберса. На страницѣ 309 выше упомянутаго сочиненія Оппольцеръ приводитъ результаты изслѣдованія этого уравненія. Болѣе детальное изслѣдованіе о числѣ положительныхъ корней предыдущаго уравненія произведено Оппольцеромъ въ Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Band LXXXVI. 1882. Wien) на страницахъ 885—892 въ статьѣ „Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenprobleme“. Послѣднее изслѣдованіе привело Оппольцера къ заключенію, что предыдущее уравненіе можетъ имѣть не болѣе четырехъ дѣйствительныхъ корней, изъ которыхъ нечетное число (одинъ или три) корней могутъ быть положительными; поэтому задача о вычисленіи параболическихъ орбитъ по способу Ольберса можетъ имѣть или три рѣшенія, или одно рѣшеніе. Въ упомянутомъ выше курсѣ Оппольцеръ приводитъ примѣръ вычисленія по тремъ наблюденіямъ параболической орбиты фиктивной кометы (координаты кометы и земли придуманы авторомъ для трехъ моментовъ), при чемъ для этой кометы получаются три различныя параболическія орбиты. Вскорѣ изслѣдованія Оппольцера оправдались при вычисленіи параболической орбиты дѣйствительной кометы. Оппенгеймъ вычислилъ по тремъ наблюденіямъ (Souza

Pinto въ Coimbra 1882. Sept. 17, 18, 19. Astr. Nachr. № 2459) орбиту кометы Крульса и получилъ двѣ параболическихъ орбиты (Asrt. Nachr. № 2464). Оппольцеръ, прочитавъ въ Astr. Nachr. сообщеніе Оппенгейма о двухъ различныхъ параболическихъ орбитахъ для кометы Крульса, показалъ въ Astr. Nachr. № 2468, что существуетъ еще и третье рѣшеніе для той же кометы, что вполнѣ согласовалось съ теоретическими изслѣдованіями Оппольцера. Въ томъ же номерѣ Astr. Nachr. Оппольцеръ даетъ безъ вывода условія для существованія трехъ рѣшеній задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ. Выводъ этихъ условій данъ Оппольцеромъ въ упомянутой уже статьѣ: „Ueber die Kriterien....“

Н. Герцъ въ своей статьѣ „Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen“ (Sitzungsber. der K. Akademie der Wissensch. Band LXXXVI, стр. 1125) пишетъ:

... Es ist bemerkenswerth, dass das Problem der Bahnbestimmung unter der Annahme einer parabolichen Bahn ($e=1$) *eine* oder *drei* verschiedene Lösungen zulässt, für welche Oppolzer die Bedingungen in Sitzungsberichten LXXXVI Bd. pag. 885 publicirte, während für die allgemeinere Lösung ohne eine bestimmte Annahme über die Excentricität nur der Ausnahmsfall eintreten kann, dass *zwei* verschiedene Elementensysteme der Gleichung genügen. Auch tritt dabei die sonderbare Erscheinung auf, dass die Bedingungen für den ersten, doch bedeutend einfacheren Fall complicirter sind als für den zweiten“.

Нельзя не согласиться съ Н. Герцомъ, что весьма удивительно, на первый взглядъ, что болѣе простая задача о вычисленіи параболическихъ орбитъ (эксцентриситетъ равенъ 1) можетъ имѣть три рѣшенія, между тѣмъ какъ общая задача о вычисленіи орбитъ безъ всякаго ограниченія относительно эксцентриситета, можетъ имѣть не болѣе двухъ рѣшеній (третье рѣшеніе соотвѣтствуетъ орбитѣ земли). Въ концѣ своей статьи Н. Герцъ указываетъ критеріумъ, по которому можно узнать, какая изъ трехъ орбитъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Для этого надо вычислить разстояніе кометы для средняго момента наблюденій отъ земли по общему способу, безъ всякаго ограниченія относительно эксцентриситета, и по способу Ольберса, тогда истинное разстояніе кометы будетъ то, которое получится по обоимъ способамъ. Въ 1896 году появляется статья Ern. Pasquier: „Sur les solutions multiples du probléme des comètes“ (Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-artes de Belgique. 66-me année. 3-me serie. tome XXXII. 1897. Bruxelles). Pasquier въ этой статьѣ, слѣдуя геометрическому методу Oppolzer'а, примѣненному послѣднимъ къ опредѣленію числа положительныхъ корней уравненія 6-й степени въ способѣ Ольберса ($\rho_3 = M\rho_1$), изслѣдуетъ вопросъ о числѣ положительныхъ корней уравненія 6-ой степени въ способѣ Oppolzer'a

($\rho_3 = m + M\rho_1$, гдѣ $m \neq 0$). Уравненіе 6-ой степени у Pasquier получается сложнѣе, чѣмъ у Oppolzer'a, но идея изслѣдованія та же, что и у Oppolzer'a.

Наконецъ въ 1899 году появляется статья L. Picart „Sur la suppression des essais dans le calcul des orbites paraboliques“ (Bulletin Astronomique. Tome XVI. Novembre 1899). Въ этой статьѣ авторъ, излагаетъ способъ Лапласа для вычисленія орбитъ и получаетъ извѣстное уравненіе 8-ой степени. Вводя затѣмъ условіе, что орбита кометы параболическая, авторъ получаетъ еще одно уравненіе; у полученныхъ двухъ уравненій онъ ищетъ общіе корни и понижаетъ степень уравненія до 1-ой, а въ исключительныхъ случаяхъ до 2-ой и 3-ей. Ко всему выше сказанному слѣдуетъ прибавить, что еще Лежандръ въ 1806 году въ сочиненіи „Nouvelles méthodes pour la déterminantion des orbites des comètes“ привелъ вычисленіе геоцентрическаго разстоянія кометы въ моментъ средняго наблюденія для параболической орбиты къ рѣшенію уравненія 3-ей степени. Въ томъ же сочиненіи Лежандръ изслѣдуетъ геометрически вопросъ о числѣ положительныхъ корней уравненія 6-ой степени при вычисленіи параболическихъ орбитъ и приходитъ къ заключенію, что это уравненіе не можетъ имѣть болѣе одного положительнаго корня, что противорѣчитъ изслѣдованіямъ Oppolzer'a.

Интересъ, который представляетъ вопросъ о числѣ возможныхъ рѣшеній при вычисленіи параболическихъ орбитъ, какъ въ теоретическомъ, такъ и въ практическомъ отношеніи, а также противорѣчивые результаты изслѣдованій Лежандра и Оппольцера, побудили насъ заняться выше упомянутой задачей, къ рѣшенію которой мы теперь и перейдемъ.

I.

Выводъ приближеннаго разрѣшающаго уравненія для опредѣленія геоцентрическаго разстоянія кометы.

Какъ извѣстно задача о вычисленіи геоцентрическихъ или геліоцентрическихъ разстояній кометы, движущейся по параболѣ, приводится къ рѣшенію слѣдующей системы четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными [1]):

$$
\begin{aligned}
r_1^2 &= (\rho_1 - R_1 \cos\psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2\psi \\
r_3^2 &= (M\rho_1 - R_3 \cos\psi_3)^2 + R_3^2 \sin^2\psi_3, \\
s^2 &= (h\rho_1 - g\cos\varphi)^2 + g^2 \sin^2\varphi, \\
6k(t_3 - t_1) &= (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

гдѣ r_1 и r_3 геліоцентрическія разстоянія кометы для моментовъ крайнихъ наблюденій, ρ_1—геоцентрическое разстояніе кометы въ моментъ перваго наблюденія, M величина нулеваго порядка, извѣстная съ точностью до величинъ перваго порядка включительно и отличающаяся отъ 1 на величину перваго порядка [2]), если за малыя величины перваго порядка примемъ промежутки времени между наблюденіями. R_1 и R_3 суть геліоцентрическіе радіусы векторы земли въ моменты крайнихъ наблюденій, k—Гауссова постоянная, t_1 и t_3—моменты крайнихъ наблюденій, s—хорда, соединяющая крайнія положенія кометы, а $\cos\psi_1$, $\sin\psi_1$, $\cos\psi_3$, $\sin\psi_3$ удовлетворяютъ уравненіямъ [3])

---

[1]) Oppolzer. Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Bd. I. 1882. pag. 291, 292.

[2]) См. тамъ же pag. 280, 281

[3]) См. тамъ же.

$$\cos\psi_1 = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1), \qquad \cos\psi_3 = \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3),$$
$$\cos P_1 \sin\psi_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1), \qquad \cos P_3 \sin\psi_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3), \qquad (2)$$
$$\sin P_1 \sin\psi_1 = \sin\beta_1, \qquad \sin P_3 \sin\psi_3 = \sin\beta_3.$$

при чемъ λ_1, λ_3, β_1, β_3 суть геоцентрическія долготы и широты кометы въ моменты крайнихъ наблюденій, L_1, L_3—геліоцентрическія долготы земли въ тѣ же моменты времени. Положимъ теперь для краткости

$$g \sin G = R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1$$
$$g \cos G = R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1. \qquad (3)$$

Возвышая предыдущія уравненія въ квадратъ и складывая результаты, получимъ

$$g^2 = R_3^2 + R_1^2 - 2R_3 R_1 \cos(L_3 - L_1),$$

откуда заключаемъ, что g есть хорда, соединяющая крайнія положенія земли. Выраженіе для g^2 можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$g^2 = (R_3 - R_1)^2 + 4R_3 R_1 \sin^2 \frac{1}{2}(L_3 - L_1);$$

такъ какъ, вообще говоря, $R_3 - R_1$ и $L_3 - L_1$ суть малыя величины перваго порядка, то g^2 есть величина второго порядка. а g величина перваго порядка. Постоянныя φ и h опредѣляются изъ уравненій [1])

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos(G - H)$$
$$\sin\varphi \cos Q = \cos\zeta \sin(G - H) \qquad (4)$$
$$\sin\varphi \sin Q = \sin\zeta$$

$$h \cos\zeta \cos(H - \lambda_3) = M \cos\beta_3 - \cos(\lambda_3 - \lambda_1)\cos\beta_1$$
$$h \cos\zeta \sin(H - \lambda_3) = \sin(\lambda_3 - \lambda_1)\cos\beta_1 \qquad (5)$$
$$h \sin\zeta = M \sin\beta_3 - \sin\beta_1$$

Возвышая уравненія (5) въ квадратъ и складывая результаты. получимъ

$$h^2 = 1 + M^2 - 2M\left(\sin\beta_1 \sin\beta_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)\right),$$

---

[1]) Oppolzer. Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Bd. I. 1882. pag. 290.

или

$$h^2 = (1 - M)^2 + 4M\left[sin^2\frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_1) + cos\,\beta_1\,cos\,\beta_3\,sin^2\frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1)\right].$$

Такъ какъ $1 - M$, $\beta_3 - \beta_1$ и $\lambda_3 - \lambda_1$ суть величины перваго порядка, то h^2 есть величина второго порядка, а h есть величина перваго порядка. Кромѣ того замѣтимъ, что по смыслу задачи h и g суть положительныя величины, а углы φ, ψ_1 и ψ_3 заключены въ предѣлахъ 0^0 и 180^0.

Перейдемъ теперь къ уравненію Эйлера

$$3\tau_2 = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}},$$

гдѣ для краткости мы положили

$$\tau_2 = 2k(t_3 - t_1),$$

при этомъ въ правой части уравненія Эйлера удержанъ только знакъ —, такъ какъ при первоначальномъ опредѣленіи орбиты мы предполагаемъ, что геліоцентрическое движеніе кометы въ промежутокъ времени, протекшій между третьимъ и первымъ наблюденіями, меньше 180^0. Выше приведенное уравненіе Эйлера вполнѣ точно. Если бы мы вставили въ предыдущее уравненіе вмѣсто r_1, r_3 и s ихъ значенія изъ уравненій (1) въ зависимости отъ ρ_1, то мы получили бы ирраціональное уравненіе съ однимъ только неизвѣстнымъ ρ_1. Если бы мы уничтожили въ полученномъ уравненіи ирраціональность, то мы получили бы уравненіе очень высокой степени, опредѣлить число положительныхъ корней котораго было бы весьма затруднительно, поэтому отъ такого способа рѣшенія системы уравненій (1) мы принуждены отказаться. Кромѣ того при уничтоженіи въ уравненіи ирраціональности, мы могли бы ввести въ окончательное уравненіе посторонніе корни, не удовлетворяющіе первоначальному уравненію, а потому мы усложнили бы себѣ и безъ того трудную задачу, поэтому отъ такого способа рѣшенія системы уравненій (1) надо отказаться и по этой причинѣ. Остается другой путь рѣшенія системы уравненій (1), который приведетъ насъ къ цѣли, а именно путь приближенный. Вмѣсто точнаго уравненія Эйлера мы возьмемъ уравненіе, которое мало отъ него отличается. Для этого представимъ уравненіе Эйлера въ видѣ

$$\frac{3\tau_2}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}};$$

замѣтимъ, что $s < r_1 + r_3$, и разложимъ оба члена правой части предыдущаго уравненія въ ряды по степенямъ $\frac{s}{r_1 + r_3}$, тогда послѣ преобразо-

ваній получимъ

$$\frac{3\tau_2}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3s}{r_1+r_3} - \frac{1}{8}\frac{s^3}{(r_1+r_3)^3} + \cdots\cdots$$

Если промежутокъ времени между крайними наблюденіями есть малая величина перваго порядка, то s также малая величина перваго порядка, поэтому, отбрасывая въ предыдущемъ уравненіи малыя величины третьяго порядка, получимъ [1])

$$s = \frac{\tau_2}{\sqrt{r_1+r_3}} \tag{6}$$

Уравненіе (6) и есть приближенное уравненіе Эйлера, точное до членовъ второго порядка включительно. Это уравненіе значительно проще точнаго уравненія Эйлера, но и въ этомъ уравненіи мы не можемъ подставить точныя значенія r_1 и r_3 изъ уравненій (1), такъ какъ послѣ такой подстановки мы ввели бы въ уравненіе (6) еще два радикала, а потому послѣ приведенія уравненія къ раціональному виду мы получили бы сложное уравненіе двѣнадцатой степени, изслѣдовать свойства корней котораго было бы весьма трудно. Поэтому въ уравненіи (6) мы должны вычислить $\sqrt{r_1+r_3}$ съ точностью по крайней мѣрѣ до величинъ перваго порядка включительно, такъ какъ тогда полученное уравненіе будетъ отличаться отъ точнаго уравненія Эйлера на малыя величины третьяго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\sqrt{r_1+r_3} = \sqrt{A} + \varepsilon,$$

гдѣ A приближенное значеніе r_1+r_3, а ε величина второго порядка, тогда уравненіе (6) приметъ видъ

$$s\sqrt{A+\varepsilon} = \tau_2,$$

или

$$s\sqrt{A}\left(1+\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = \tau_2,$$

но такъ какъ $\frac{\varepsilon}{A}$ малая величина второго порядка, то мы можемъ написать

$$s\sqrt{A}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{A}+\cdots\right) = \tau_2.$$

[1]) Du Séjour, Traité analytique des mouvemens apparens des corps céletes. t. II. pp, 274—275.

Отбрасывая въ послѣднемъ уравненіи членъ $\frac{s\varepsilon}{2\sqrt{A}}$ и всѣ члены за нимъ. слѣдующіе, мы сдѣлаемъ ошибку третьяго порядка; послѣ этого мы получимъ

$$s\sqrt{A} = \tau_2. \tag{7}$$

Найдемъ теперь A [1]). Для этого замѣтимъ, что

$$r_1^2 + r_3^2 = \frac{(r_1 + r_3)^2}{2} + \frac{(r_3 - r_1)^2}{2},$$

откуда находимъ

$$\frac{(r_1 + r_3)^2}{2} = r_1^2 + r_3^2 - \frac{(r_3 - r_1)^2}{2},$$

или

$$r_1 + r_3 = \sqrt{2(r_1^2 + r_3^2) - (r_3 - r_1)^2}. \tag{8}$$

Если обозначимъ черезъ t_1, t_2 и t_3 моменты трехъ наблюденій кометы и черезъ r_2 геліоцентрическій радіусъ векторъ кометы, соотвѣтствующій моменту t_2, то найдемъ

$$r_1 = r_2 - (t_2 - t_1)\frac{dr_2}{dt} + \cdots\cdots$$

$$r_3 = r_2 + (t_3 - t_2)\frac{dr_2}{dt} + \cdots\cdots$$

$$r_3 - r_1 = (t_3 - t_1)\frac{dr_2}{dt} + \cdots\cdots,$$

слѣдовательно разность $r_3 - r_1$ есть малая величина перваго порядка. Формулу (8) мы можемъ переписать слѣдующимъ образомъ:

$$r_1 + r_3 = \sqrt{2(r_1^2 + r_3^2)}\left[1 - \frac{(r_3 - r_1)^2}{2(r_1^2 + r_3^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

или, такъ какъ $\frac{(r_3 - r_1)^2}{2(r_1^2 + r_3^2)}$ малая величина второго порядка,

$$r_1 + r_3 = \sqrt{2(r_1^2 + r_3^2)}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{(r_3 - r_1)^2}{(r_1^2 + r_3^2)} + \cdots\right).$$

[1]) См. Callandreau. Aperçu des méthodes... pp. 24, 40.
W. Olbers. Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode... pp. 47, 48.

Взявъ для суммы r_1+r_3 выраженіе

$$r_1+r_3=\sqrt{2(r_1^2+r_3^2)}=A, \tag{9}$$

мы сдѣлаемъ ошибку второго порядка.

Вставивъ въ формулу (9) значенія r_1^2 и r_3^2 изъ уравненій (1), получимъ

$$r_1+r_3=\sqrt{2}\sqrt{a_1^2\rho_1^2-2b_1\rho_1+c_1^2}, \tag{10}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} a_1^2&=1+M^2,\\ b_1&=R_1\cos\psi_1+MR_3\cos\psi_3,\\ c_1^2&=R_1^2+R_3^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Надо замѣтить, что M точно до членовъ перваго порядка включительно, а потому выраженіе (10) для суммы $r_1+r_3=A$ точно до членовъ перваго порядка включительно.

Oppolzer полагаетъ

$$r_1+r_3=2r_2,$$

что точно вообще только до величинъ перваго порядка исключительно, поэтому такое положеніе правильно, но менѣе точно, чѣмъ предыдущее. Возвысимъ теперь уравненіе (7) въ квадратъ, тогда получимъ

$$s^2A=\tau_2^2, \tag{12}$$

которое точно до величинъ третьяго порядка включительно. Уравненіе (12) не будетъ имѣть дѣйствительныхъ корней, чуждыхъ уравненію (7). Дѣйствительно уравненіе (12) можно написать такъ:

$$(s\sqrt{A}-\tau_2)(s\sqrt{A}+\tau_2)=0;$$

корни, чуждые уравненію (7), могутъ принадлежать только уравненію

$$s\sqrt{A}+\tau_2=0,$$

а послѣднее уравненіе дѣйствительныхъ корней не можетъ имѣть, такъ какъ $s\sqrt{A}$ и τ_2 суть существенно положительныя величины, а потому сумма ихъ не можетъ обратиться въ нуль для дѣйствительныхъ значеній ρ_1, черезъ которое выражаются s и A.

Подставивъ въ уравненіе (12) вмѣсто $A=r_1+r_3$ его значеніе изъ (10), а вмѣсто s^2 его значеніе изъ уравненій (1), получимъ уравненіе

$$\sqrt{2}\,(h^2\rho_1^2-2hg\rho_1\cos\varphi+g^2)\sqrt{a_1^2\rho_1^2-2b_1\rho_1+c_1^2}=\tau_2^2. \tag{13}$$

Oppolzer полагаетъ

$$s^2 = (h\rho_2 - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi, \tag{14}$$

слѣдовательно онъ полагаетъ $\rho_1 = \rho_2$ и потому дѣлаетъ при вычисленіи ρ_1 ошибку перваго порядка, такъ какъ

$$\rho_1 = \rho_2 - (t_2 - t_1)\frac{d\rho_2}{dt} + \cdots$$

Полагая

$$(t_2 - t_1)\frac{d\rho_2}{dt} = a, \quad \rho_1 = \rho_2 - a$$

и подставляя послѣднее значеніе ρ_1 въ третье изъ уравненій (1), получимъ

$$s^2 = (h\rho_2 - g\cos\varphi)^2 - 2ha(h\rho_2 - g\cos\varphi) + a^2h^2 + g^2\sin^2\varphi.$$

Такъ какъ h и g суть величины перваго порядка, то, отбрасывая въ предыдущемъ уравненіи члены, содержащіе a, мы сдѣлаемъ ошибку не ниже третьяго порядка, а потому и въ этомъ случаѣ Oppolzer поступаетъ вполнѣ законно, хотя и вводитъ излишнюю неточность въ уравненіе (13) и получаетъ разрѣшающее уравненіе, точное только до членовъ второго порядка включительно. Мы же сохранили въ уравненіи (13) ρ_1, такъ какъ это (или ρ_3) есть главное неизвѣстное задачи при вычисленіи параболическихъ орбитъ, при чемъ уравненіе (13) точно до членовъ третьяго порядка включительно.

Степени точности разрѣшающаго уравненія Oppolzer не изслѣдуетъ. Онъ только говоритъ въ „Lehrbuch... Bd. I. pag. 308“: „Um die diesbezügliche Untersuchung möglichst zu erleichtern, sollen in den betreffenden Gleichungen jene Vereinfachungen eingeführt werden, die zullässig sind, solange Product: Quadrat der mit der Constante des Sonnensystems multiplicirten Zwischenzeit in die negative dritte Potenz des Radiusvectors, eine mässige Grösse bleibt“.

Далѣе Oppolzer безъ вывода даетъ зависимость между хордой g, соединяющей крайнія положенія земли, и промежуткомъ времени $t_3 - t_1$. Выведемъ теперь эту зависимость и укажемъ степень ея точности. Намъ извѣстно, что

$$g^2 = (X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2, \tag{15}$$

X_3, Y_3, X_1, Y_1 суть геліоцентрическія координаты крайнихъ положеній земли, при чемъ за плоскость XY принята плоскость орбиты земли. Разлагая въ ряды эти координаты и отбрасывая члены выше второго порядка, получимъ

$$X_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2(t_2-t_1)^2}{R_2^3}\right)X_2 - (t_2-t_1)\frac{dX_2}{dt},$$

$$Y_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2(t_2-t_1)^2}{R_2^3}\right)Y_2 - (t_2-t_1)\frac{dY_2}{dt},$$

$$X_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2(t_3-t_2)^2}{R_2^3}\right)X_2 + (t_3-t_2)\frac{dX_2}{dt},$$

$$Y_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2(t_3-t_2)^2}{R_2^3}\right)Y_2 + (t_3-t_2)\frac{dY_2}{dt},$$

гдѣ X_2, Y_2 суть координаты положенія земли въ моментъ времени t_2. Подставивъ предыдущія выраженія координатъ въ формулу для g^2, получимъ

$$g^2 = \left\{\frac{k^2}{2R_2^3}\left[(t_2-t_1)^2-(t_3-t_2)^2\right]X_2 + (t_3-t_1)\frac{dX_2}{dt}\right\}^2 +$$

$$+ \left\{\frac{k^2}{2R_2^3}\left[(t_2-t_1)^2-(t_3-t_2)^2\right]Y_2 + (t_3-t_1)\frac{dY_2}{dt}\right\}^2.$$

Отбрасывая въ предыдущемъ выраженіи для g^2 члены выше второго порядка, получимъ

$$g^2 = (t_3-t_1)^2\left[\left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_2}{dt}\right)^2\right]. \qquad (16)$$

при чемъ нами отброшенъ между прочимъ членъ третьяго порядка

$$\frac{k^2(t_3-t_1)}{R_2^3}\left[(t_2-t_1)^2-(t_3-t_2)^2\right]R_2\frac{dR_2}{dt}.$$

Но интегралъ живыхъ силъ намъ даетъ

$$\left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_2}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{R_2}-1\right),$$

гдѣ большая полуось земной орбиты принята за единицу. Подставивъ это значеніе

$$\left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_2}{dt}\right)^2$$

въ уравненіе (16), получимъ

$$g^2 = k^2(t_3-t_1)^2\left(\frac{2}{R_2}-1\right),$$

или

$$g^2 = \frac{\tau_2^2}{4}\left(\frac{2}{R_2}-1\right), \qquad (17)$$

при чемъ послѣднее значеніе для g^2 точно только до членовъ второго порядка включительно.

Замѣтимъ здѣсь кстати, что подобно предыдущему для параболической орбиты кометы получимъ

$$s^2 = \frac{2k^2(t_3 - t_1)^2}{r_2},$$

или

$$s^2 = \frac{\tau_2^2}{2r_2}, \tag{18}$$

при чемъ послѣднее выраженіе для квадрата хорды s^2 точно до членовъ второго порядка включительно.

Такимъ образомъ мы другимъ путемъ пришли къ выводу уравненія (18), которое служитъ однимъ изъ главныхъ уравненій въ вопросѣ о числѣ возможныхъ рѣшеній задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ по способу Ольберса. Въ своемъ изслѣдованіи Oppolzer ограничивается малыми величинами второго порядка, а потому съ тою же степенью точности опредѣляетъ τ_2^2 изъ уравненія (17) или изъ уравненія

$$g^2 = \frac{\tau_2^2}{4R_2^2}, \tag{19}$$

которое получится изъ уравненія (17). если мы въ немъ ограничимся малыми величинами перваго порядка относительно эксцентриситета земной орбиты. Мы же не можемъ въ уравненіи (13) замѣнить τ_2^2 его значеніемъ изъ уравненія (17) или изъ уравненія (19), не уменьшивъ степени точности уравненія (13). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (13) точно до членовъ третьяго порядка включительно, а τ_2^2, опредѣленное изъ уравненія (17) или изъ уравненія (19) точно только до членовъ второго порядка включительно.

Если мы положимъ

$$\frac{h}{g} = a,$$

то можемъ написать разрѣшающее уравненіе (13) въ видѣ

$$(a^2\rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1)\sqrt{a_1^2\rho_1^2 - 2b_1\rho_1 + c_1^2} = \frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}}, \tag{20}$$

которое точно до величинъ перваго порядка включительно, такъ какъ мы обѣ части уравненія раздѣлили на g^2-малую величину второго порядка. Приводя уравненіе (20) къ раціональному виду, получимъ

$$(a^2\rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1)^2 (a_1^2\rho_1^2 - 2b_1\rho_1 + c_1^2) = \frac{\tau_2^4}{2g^4}. \tag{21}$$

Уравненіе (21) не имѣетъ дѣйствительныхъ корней, чуждыхъ уравненію (20), въ чемъ мы уже убѣдились раньше, такъ какъ уравненія (20) и (21) получаются соотвѣтственно изъ уравненій (7) и (12) подстановкой вмѣсто s и A ихъ значеній въ функціи ρ_1.

II.

Опредѣленіе по способу Оппольцера числа положительныхъ корней разрѣшающаго уравненія для вычисленія геоцентрическаго разстоянія кометы.

Уравненіе (21), служащее для опредѣленія главнаго неизвѣстнаго задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ, есть уравненіе шестой степени, а потому оно имѣетъ, вообще говоря, шесть корней. Для рѣшенія вопроса о числѣ дѣйствительныхъ корней уравненія (21), будемъ разсматривать два уравненія

$$y = (a^2 \rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1)^2 (a_1^2 \rho_1^2 - 2b_1 \rho_1 + c_1^2), \tag{22}$$

и

$$y = \frac{\tau_2^4}{2g^4}. \tag{23}$$

Если ρ_1 и y мы будемъ разсматривать какъ прямоугольныя координаты точки, то уравненіе (22) представитъ собою плоскую кривую линію шестого порядка, а уравненіе (23) представитъ прямую, параллельную оси абсциссъ ρ_1 и отстоящую отъ послѣдней на разстояніи $\frac{\tau_2^4}{2g^4}$. Очевидно, что абсциссы точекъ пересѣченія кривой (22) съ прямой (23) будутъ корнями уравненія (21).

Найдемъ теперь maxima и minima функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (22). Для этого приравняемъ нулю производную отъ правой части уравненія (22), тогда получимъ

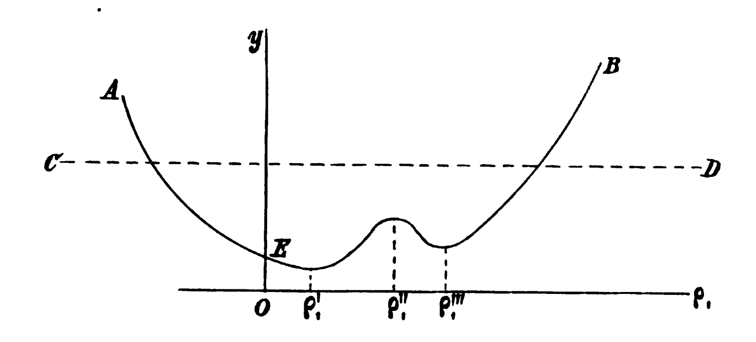
$$2(a^2 \rho_1 - a\cos\varphi)(a^2 \rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1)(a_1^2 \rho_1^2 - 2b_1 \rho_1 + c_1^2) +$$

$$+ (a^2 \rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1)^2 (a_1 \rho_1 - b_1) = 0;$$

замѣтимъ, что трехчленъ $a^2\rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1$ не можетъ обратиться въ нуль при дѣйствительныхъ значеніяхъ ρ_1 и при $\pm\cos\varphi \leqslant 1$, а потому, раздѣливъ обѣ части предыдущаго уравненія на трехчленъ $a^2\rho_1^2 - 2a\rho_1\cos\varphi + 1$, получимъ слѣдующее уравненіе третьей степени:

$$2(a^2\rho_1 - a\cos\varphi)(a_1^2\rho_1^2 - 2b_1\rho_1 + c_1^2) + (a^2\rho_1^2 - 2a\rho_1\cos\varphi + 1)(a_1^2\rho_1 - b_1) = 0. \quad (24)$$

Такъ какъ при $\rho_1 = \pm\infty$ ордината $y = +\infty$, то кривая, выражаемая уравненіемъ (22), лежитъ цѣликомъ по одну сторону отъ оси абсциссъ въ направленіи положительной оси ординатъ. Если кубическое уравненіе (24) имѣетъ три дѣйствительныхъ корня, то кривая (22) имѣетъ одинъ maximum, расположенный между двумя minima; если же уравненіе (24) имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, то кривая (22) имѣетъ только одинъ minimum безъ maximum.



Чертежъ даетъ нѣкоторое понятіе о кривой (22) AB, если уравненіе (24) имѣетъ три дѣйствительныхъ корня. При этомъ слѣдуетъ обратить особенное вниманіе на точку E, положеніе которой, какъ мы покажемъ ниже, остается неизмѣннымъ для всѣхъ возможныхъ кривыхъ (22). На чертежѣ прямая CD представляетъ прямую (23), если разстояніе ея отъ оси ρ_1 равно $\frac{\tau_2^4}{2g^4}$. При выше указанныхъ условіяхъ кривая (22) и прямая (23) не могутъ имѣть болѣе четырехъ точекъ пересѣченія; поэтому уравненіе шестой степени (21) имѣетъ не болѣе четырехъ дѣйствительныхъ корней и не менѣе двухъ мнимыхъ корней. Если уравненіе (24) имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, то кривая (22) имѣетъ одинъ minimum безъ maximum и тогда уравненіе (21) будетъ имѣть два дѣйствительныхъ корня; но при $\rho_1 = 0$ ордината точки E кривой AB постоянна и равна c_1^2, что весьма близко къ 2, такъ какъ вслѣдствіе малаго эксцентриситета земной орбиты R_1 и R_3 мало отличаются отъ единицы, а $\frac{\tau_2^4}{2g^4}$ весьма близко къ

$$\frac{8}{\left(\frac{2}{R_2}-1\right)^2};$$

предыдущій результатъ мы получимъ, если въ выраженіе для

$$\frac{\tau_2^4}{2g^4}$$

подставимъ значеніе τ_2 изъ уравненія (17), или же, полагая $R_2=1$ на основаніи выше сказаннаго, найдемъ, что

$$\frac{\tau_2^4}{2g^4}$$

мало отличается отъ 8. А потому заключаемъ, что въ случаѣ двухъ дѣйствительныхъ корней уравненія (21) одинъ изъ нихъ будетъ отрицательнымъ, т. е. не соотвѣтствующимъ задачѣ, другой же корень будетъ положителенъ; слѣдовательно въ этомъ случаѣ задача о вычисленіи параболической орбиты будетъ рѣшаться однозначно. Если же уравненіе (24) имѣетъ три дѣйствительныхъ корня, которые обозначимъ черезъ ρ_1', ρ_1'' и ρ_1''', то кривая (22) съ прямой (23) можетъ пересѣкаться или въ двухъ, или въ четырехъ точкахъ. Въ первомъ случаѣ уравненіе (21) будетъ имѣть одинъ положительный и одинъ отрицательный корень, во второмъ случаѣ уравненіе (21) будетъ имѣть или три положительныхъ корня и одинъ отрицательный, или три отрицательныхъ корня и одинъ положительный. Если кривая (22) пересѣкается съ прямой (23) въ четырехъ точкахъ, то должны выполняться слѣдующія неравенства:

$$\begin{aligned}
&(a^2\rho_1'^2-2a\rho_1'\cos\varphi+1)^2(a_1^2\rho_1'^2-2b_1\rho_1'+c_1^2)<\frac{\tau_2^4}{2g^4},\\
&(a^2\rho_1''^2-2a\rho_1''\cos\varphi+1)^2(a_1^2\rho_1''^2-2b_1\rho_1''^2+c_1^2)>\frac{\tau_2^4}{2g^4}, \qquad (25)\\
&(a^2\rho_1'''^2-2a\rho_1'''\cos\varphi+1)^2(a_1^2\rho_1'''^2-2b_1\rho_1'''^2+c_1^2)<\frac{\tau_2^4}{2g^4}.
\end{aligned}$$

Итакъ, предыдущее изслѣдованіе показало, что уравненіе (21) можетъ имѣть или одинъ или три положительныхъ корня. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только важный въ практическомъ отношеніи случай, когда уравненіе (21) имѣетъ три положительныхъ корня. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, какъ видно изъ чертежа, ρ_1'' и ρ_1''' непремѣнно должны быть положительны, если предположимъ, что

$$\rho_1'<\rho_1''<\rho_1'''.$$

Кромѣ того въ этомъ случаѣ вполнѣ достаточно выполненія двухъ послѣднихъ неравенствъ (25). На основаніи предыдущаго задача сводится къ рѣшенію кубическаго уравненія (24), которое можно написать въ формѣ

$$\rho_1^3 + A_1 \rho_1^2 + A_2 \rho_1 + A_3 = 0, \tag{26}$$

гдѣ

$$A_1 = -\frac{5}{3}\frac{b_1}{a_1^2} - \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{a}$$

$$A_2 = \frac{2}{3}\frac{c_1^2}{a_1^2} + 2\frac{b_1}{a_1^2}\frac{\cos\varphi}{a} + \frac{1}{3a^2} \tag{27}$$

$$A_3 = -\frac{b_1}{3a^2a_1^2} - \frac{2}{3}\frac{c_1^2}{a_1^2}\frac{\cos\varphi}{a}.$$

Полагая въ уравненіи (26)

$$x = \rho_1 + \frac{1}{3}A_1, \quad p = \frac{1}{3}A_1^2 - A_2,$$
$$q = \frac{2}{27}A_1^3 - \frac{1}{3}A_1A_2 + A_3, \tag{28}$$

мы приведемъ кубическое уравненіе (26) къ нормальному виду

$$x^3 - px + q = 0.$$

Чтобы три корня для x, а слѣдовательно и для ρ_1, послѣдняго кубическаго уравненія были дѣйствительны, необходимо, чтобы p было положительно и

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}.$$

Если мы положимъ

$$r^2 = \frac{4}{3}p, \quad \sin 3\omega = \frac{4q}{r^3}$$

при чемъ r всегда положительно, 3ω имѣетъ знакъ q и лежитъ въ первой четверти ($\omega < 30^0$), то три корня уравненія (26) можемъ написать такъ:

$$x_1 = -r\sin(60^0 + \omega), \quad x_2 = r\sin\omega, \quad x_3 = r\sin(60^0 - \omega), \tag{30}$$

при чемъ

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

На основаніи предыдущаго находимъ

$$\rho_1' = -\, r \sin(60^0 + \omega) - \frac{1}{3} A_1,$$

$$\rho_1'' = r \sin \omega - \frac{1}{3} A_1, \tag{31}$$

$$\rho_1''' = r \sin(60^0 - \omega) - \frac{1}{3} A_1.$$

Для существованія трехъ положительныхъ корней уравненія (21) необходимо, чтобы ρ_1'' и ρ_1''' были положительны.

Резюмируя все предыдущее, мы можемъ установить слѣдующіе критеріи для того, чтобы уравненіе (21) имѣло три положительныхъ корня: p должно быть положительно и $4q < r^3$, $r > 0$, 3ω должно имѣть знакъ q и быть меньше 90^0, ρ_1'' и ρ_1''' должны быть положительны и, кромѣ того, должны удовлетворяться два послѣднихъ неравенства (25).

Чтобы пояснить предыдущія теоретическія изслѣдованія, приведемъ вкратцѣ вычисленіе элементовъ параболической орбиты кометы Крульса по слѣдующимъ даннымъ:

СРЕДН. БЕРЛИНСК. ВРЕМЯ.			λ	β	L	$lg\,R$
1882	Сент.	18.04782	172°46′57″.6	—1°37′14″.6	175°27′ 4″.9	0.001827
	„	19.03886	171° 5′47″.9	—3°23′26″.1	176°25′12″.7	0.001706
	„	20.03157	169°54′29″.1	—4°48′20″.3	177°23′28″.1	0.001583

Изъ статьи Оппольцера въ Sitzungsberichte der kais. Akad. 1882, стр. 886, выписываемъ

$$\log M = 0.022803,$$

$G = 267^0 22' 22''.0$	$\log \sin \psi_1 = 8.736093$
$\log g = 8.531373$	$\log \cos \psi_1 = 9.999355$
$H = 125^0 52' 49''.6$	$\log \sin \psi_3 = 9.188835$
$\log \cos \zeta = 9.885777$	$\log \cos \psi_3 = 9.994756$
$\log \sin \zeta = 9_n.805885$	$\log \sin \varphi = 9.902454$
$\log h = 8.972331$	$\log \cos \varphi = 9_n.779275$

Произведя дальнѣйшія вычисленія съ предыдущими данными, мы получимъ три положительныхъ корня, удовлетворяющихъ системѣ уравненій (1), а именно:



	1-й корень.	2-й корень.	3-й корень.
$log\, \rho_1$	9.548488	9.869946	0.032510
$log\, \rho_3$	9.571291	9.892749	0.055313
$log\, r_1$	9.813878	9.426780	8.967674
$log\, r_3$	9.804879	9.417259	9.325808

Чтобы узнать, какой изъ этихъ трехъ корней соотвѣтствуетъ истинной орбитѣ кометы, мы вычислимъ три системы элементовъ орбитъ, соотвѣтствующихъ этимъ корнямъ, тогда, удерживая обычныя обозначенія элементовъ, получимъ

	1.	2.	3.
T 1882 сент.	28.18658	19.72362	17.12868
π	25°20′41″.5	21°21′31″.0	64°46′ 5″.5
Ω	174°41′42″.4	175°18′34″.8	347°57′48″.3
i	21°45′46″.9	30°48′42″.5	142°56′18″.9
$log\, q$	9.787160	9.416916	8.110866

Предыдущіе элементы представляютъ среднее мѣсто кометы (въ смыслѣ: наблюденіе—вычисленіе) слѣдующимъ образомъ:

	1.	2.	3.
$d\lambda$	—12′32″.4	—9′38″.1	—1′27″.0
$d\beta$	— 7′56″.6	—6′ 6″.3	— 59″.1.

Изъ этого заключаемъ, что третій корень соотвѣтствуетъ истинной орбитѣ кометы.

Примѣнимъ теперь выведенные нами выше критеріи для существованія трехъ положительныхъ корней уравненія (21). Въ этомъ случаѣ

$$log\, a = 0.4409, \quad log\, cos\, \psi_1 = 9.9994, \quad log\, cos\, \psi_3 = 9.9948, \quad log\, cos\, \varphi = 9_n.7793,$$
$$log\, a_1^2 = 0.3244, \quad log\, b_1 = 0.3113, \quad log\, c_1^2 = 0.3044.$$

По этимъ даннымъ легко находимъ

$$A_1 = -1.3267, \quad A_2 = +0.2575, \quad A_3 = +0.0963,$$
$$p = +0.3293, \quad q = +0.0372. \quad log\, r = 9.8213,$$
$$\omega = 10^\circ.25, \quad \rho_1' = -0.1813, \quad \rho_1'' = +0.5602, \quad \rho_1''' = +0.9700,$$
$$(a^2 \rho_1''^2 - 2a\rho_1'' \cos\varphi + 1)^2 (a_1^2 \rho_1''^2 - 2b_1 \rho_1'' + c_1^2) = +10.57,$$
$$\frac{\tau_2^4}{2g^4} = +8.117,$$
$$(a^2 \rho_1'''^2 - 2a\rho_1''' \cos\varphi + 1)^2 (a_1^2 \rho_1'''^2 - 2b_1 \rho_1''' + c_1^2) = +3.726.$$

Итакъ, всѣ условія для существованія трехъ положительныхъ корней уравненія (21) удовлетворяются.

Теперь можно указать предѣлы трехъ положительныхъ корней уравненія (21), а именно: наименьшій изъ трехъ положительныхъ корней уравненія (21) будетъ заключаться между 0 и ρ_1'', средній—между ρ_1'' и ρ_1''' и, наконецъ, наибольшій корень будетъ заключаться между ρ_1''' и $+\infty$. Если кубическое уравненіе (24) будетъ имѣть только одинъ положительный корень ρ_1', то уравненіе (21) будетъ имѣть также только одинъ положительный корень, заключающійся между ρ_1' и $+\infty$.

На основаніи предыдущаго изслѣдованія мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

При вычисленіи параболической орбиты кометы необходимо изслѣдовать выше указаннымъ способомъ вопросъ, опредѣляется ли орбита кометы многозначно или однозначно; затѣмъ надо найти въ томъ или другомъ случаѣ предѣлы положительныхъ корней уравненія (21) и рѣшать уравненіе Эйлера совмѣстно съ первыми тремя уравненіями (1) по способу, предложенному Энке. Если же указанное изслѣдованіе не произведено, то нельзя быть увѣреннымъ въ томъ, что вычисленная орбита есть истинная орбита кометы.

III.

Изслѣдованія Л. Пикара.

Пуанкаре, въ предисловіи къ лекціямъ Тиссерана [1]) объ опредѣленіи орбитъ, говоритъ, что задача о вычисленіи параболическихъ орбитъ можетъ быть приведена къ рѣшенію уравненія первой степени. Пикаръ, опираясь на изслѣдованія Лапласа о вычисленіи орбитъ, просто рѣшаетъ задачу, о которой говоритъ Пуанкаре [2]). Мы изложимъ вкратцѣ изслѣдованія Пикара; при этомъ мы воспользуемся только идеей изслѣдованій Пикара, но удержимъ уже введенныя нами раньше обозначенія.

Какъ извѣстно, задача о вычисленіи орбиты свѣтила безъ всякаго ограниченія относительно эксцентриситета, приводитъ между прочимъ къ слѣдующему важному уравненію [3]):

$$K\rho_2 = \frac{\tau_1 \tau_3}{2} B_2 \left\{ \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r^3} \right\}, \text{[4])} \qquad (32)$$

которое точно до членовъ четвертаго порядка включительно. Кромѣ того при условіи, что комета движется по параболѣ, мы будемъ имѣть уравненіе (18), подставивъ въ которое значеніе s^2 изъ уравненія (14), получимъ

$$(h\rho_2 - g \cos\varphi)^2 + g^2 \sin^2\varphi = \frac{\tau_2^2}{2r_2},$$

которое точно до членовъ второго порядка включительно.

---

[1]) Leçons sur la déterminantion des orbites. p. VI.

[2]) Bulletin Astron. Tome XVI.—Novembre 1899.

[3]) Oppolzer. Lehrbuch. Bd. I. p. 361.

[4]) $\tau_1 = k(t_3 - t_2)$; $\tau_3 = k(t_2 - t_1)$.

Напишемъ предыдущее уравненіе слѣдующимъ образомъ:

$$h^2 \rho_2^2 - 2hg\rho_2 \cos\varphi + g^2 = \frac{\tau_2^2}{2r_2}. \tag{33}$$

Если мы замѣтимъ, что

$$r_2^2 = (\rho_2 - R_2 \cos\psi_2)^2 + R_2^2 \sin^2\psi_2 \;^{1)}, \tag{34}$$

то придемъ къ заключенію, что уравненіе (32) будетъ восьмой степени, а уравненіе (33)—шестой степени относительно ρ_2. Два уравненія (32) и (33) должны имѣть общій корень. Этотъ корень мы найдемъ, рѣшивъ уравненіе, которое мы получимъ, когда приравняемъ нулю общаго наибольшаго дѣлителя уравненій (32) и (33). Путь этотъ былъ указанъ еще Лапласомъ (Mécanique céleste, Livre II, § 34). Лапласъ говоритъ: „Si l'un d'eux (un des éléments de l'orbite) était donné, on aurait une nouvelle équation, au moyen de laquelle on pourrait déterminer ρ; cette équation aurait un diviseur commun avec l'équation (4) du $n^0$31, et, en cherchant ce diviseur par les méthodes ordinaires, on parviendrait à une équation du premier degré en ρ; on aurait, de plus, une équation de condition entre les données des observations, et cette équation serait celle qui doit avoir lieu pour que l'élément donné puisse appartenir à l'orbite de la comète".

Слѣдовательно вопросъ сводится къ разысканію общаго наибольшаго дѣлителя многочленовъ восьмой и шестой степени. Чтобы по возможности упростить эту задачу, преобразуемъ уравненія (32), (33) и (34), вводя согласно Оппольцеру слѣдующія обозначенія:

$$\frac{\tau_1\tau_3}{2}\frac{B_2}{K}\frac{1}{R_2^4} = m, \quad \frac{\rho_2}{R_2} = z, \quad \frac{r_2}{R_2} = \lambda,$$

$$a = \frac{h}{g} R_2,$$

тогда получимъ

$$z = m\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right), \tag{35}$$

$$a^2 z^2 - 2az\cos\varphi + 1 = \frac{\tau_2^2}{2g^2 R_2 \lambda}, \tag{36}$$

$$\lambda^2 = z^2 - 2z\cos\psi_2 + 1. \tag{37}$$

Умножимъ теперь обѣ части уравненія (35) на λ^2, тогда получимъ

$$(z - m)(z^2 - 2z\cos\psi_2 + 1) = -\frac{m}{\lambda}; \tag{38}$$

---

[1]) Входящія здѣсь буквы имѣютъ значеніе такое же, какъ и у Оппольцера (Lehrbuch).

уравненіе (38) имѣетъ дѣйствительные корни тѣ же, что и уравненіе (35), такъ какъ λ^2 по (37) не можетъ обратиться въ нуль ни для какихъ дѣйствительныхъ значеній z. Подставляя вмѣсто λ его значеніе изъ уравненія (36), получимъ

$$(z-m)(z^2-2z\cos\psi_2+1)=-\frac{2g^2R_2m}{\tau_2^2}(\alpha^2z^2-2\alpha z\cos\varphi+1),$$

или

$$z^3+l_1z^2+m_1z+n_1=0, \tag{39}$$

гдѣ

$$l_1=\frac{2g^2R_2}{\tau_2^2}\alpha^2m-m-2\cos\psi_2,$$

$$m_1=2m\cos\psi_2+1-\frac{4g^2R_2m}{\tau_2^2}\alpha\cos\varphi,$$

$$n_1=\frac{2g^2R_2m}{\tau_2^2}-m.$$

Уравненіе же (36) мы можемъ привести къ виду

$$(\alpha^2z^2-2\alpha z\cos\varphi+1)^2(z^2-2z\cos\psi_2+1)=\frac{\tau_2^4}{4g^4R_2^2},$$

или

$$z^6+L_1z^5+M_1z^4+N_1z^3+P_1z^2+Q_1z+S_1=0, \tag{40}$$

гдѣ

$$L_1=-2\left(2\frac{\cos\varphi}{\alpha}+\cos\psi_2\right),$$

$$M_1=1+8\frac{\cos\varphi}{\alpha}\cos\psi_2+\frac{2}{\alpha^2}(1+2\cos^2\varphi),$$

$$N_1=-4\left[\frac{1+\alpha^2}{\alpha^3}\cos\varphi+\frac{\cos\psi_2}{\alpha^2}(1+2\cos^2\varphi)\right],$$

$$P_1=\frac{8}{\alpha^3}\cos\varphi\cos\psi_2+\frac{2}{\alpha^2}(1+2\cos^2\varphi)+\frac{1}{\alpha^4},$$

$$Q_1=-2\left(\frac{2\cos\varphi}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}\cos\psi_2\right),$$

$$S_1=\frac{1}{\alpha^4}\left(1-\frac{\tau_2^4}{4g^4R_2^2}\right).$$

Вмѣсто того, чтобы разыскивать общій корень уравненій (35) и (36), проще разыскать общій корень уравненій (39) и (40), такъ какъ этотъ общій корень принадлежитъ обѣимъ парамъ уравненій. Дѣля лѣвую часть

уравненія (40) на лѣвую часть уравненія (39), получимъ въ остаткѣ многочленъ второй степени относительно z; дѣля же лѣвую часть уравненія (39) на полученный остатокъ, получимъ въ остаткѣ многочленъ первой степени относительно z; приравнявъ послѣдній остатокъ нулю и рѣшивъ полученное уравненіе, найдемъ искомое z. Продѣлавъ все сказанное и положивъ

$$u = M_1 - m_1 - l_1 (L_1 - l_1),$$

$$v = N_1 - n_1 - m_1 (L_1 - l_1) - l_1 u,$$

получимъ послѣ перваго дѣленія остатокъ

$$p(z^2 + qz + s),$$

гдѣ

$$p = P_1 - n_1 (L_1 - l_1) - m_1 u - l_1 v,$$

$$pq = Q_1 - n_1 u - m_1 v,$$

$$ps = S_1 - n_1 v.$$

Произведя второе дѣленіе и приравнявъ полученный остатокъ нулю, найдемъ

$$z\left[m_1 - s - (l_1 - q) q\right] = s(l_1 - q) - n_1,$$

откуда находимъ

$$z = \frac{s(l_1 - q) - n_1}{m_1 - s - (l_1 - q) q}. \tag{41}$$

Методъ этотъ не оставляетъ желать ничего лучшаго въ теоретическомъ отношеніи, но при этомъ могутъ представиться нѣсколько частныхъ случаевъ, на которые необходимо здѣсь указать.

Въ уравненіи (41) z можетъ принять значеніе $\frac{0}{0}$, тогда уравненія (39) и (40) будутъ имѣть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ

$$z^2 + qz + s,$$

а общіе корни этихъ двухъ уравненій найдемъ, рѣшивъ уравненіе

$$z^2 + qz + s = 0,$$

при чемъ мы получимъ, вообще говоря, два корня, слѣдовательно въ этомъ случаѣ уравненія (39) и (40) будутъ имѣть два общихъ корня. Если оба эти корня положительны, четвертое наблюденіе можетъ рѣшить вопросъ о томъ, какой изъ этихъ корней соотвѣтствуетъ дѣйствительной орбитѣ. Если же и остатокъ послѣ перваго дѣленія обращается тождественно въ

нуль, то уравненія (35) и (36) имѣютъ три общихъ корня: это произойдетъ при условіяхъ

$$p = 0, \quad pq = 0, \quad ps = 0,$$

а потому между данными наблюденій будутъ существовать три соотношенія. Если эти три общихъ корня уравненій (35) и (36) или уравненій (39) и (40) будутъ положительны, то слѣдуетъ непосредственно рѣшить уравненіе (39) и при помощи четвертаго наблюденія выбрать одинъ изъ этихъ трехъ корней.

Пояснимъ теперь предыдущія теоретическія соображенія на частномъ примѣрѣ. Для этого возьмемъ тѣ же три наблюденія кометы Крульса, которыя мы полагали въ основаніе вычисленій предыдущей главы. Согласно съ Н. Герцомъ [1]) имѣемъ

$$\log \frac{1}{m} = 2_n . 45202$$

и кромѣ того находимъ

$$\log \cos \psi_2 = 9.99737.$$

Пользуясь пятизначными логариѳмами сложенія и вычитанія, находимъ

$$\log l_1 = 0_n . 30057,$$

$$\log m_1 = 9 . 99437,$$

$$\log n_1 = 7 . 24860,$$

$$\log L_1 = 0_n . 04915, \qquad \log u = 9 . 69031-10,$$

$$\log M_1 = 9_n . 44243-10, \qquad \log v = 9 . 30062-10,$$

$$\log N_1 = 8 . 94980-10, \qquad \log p = 9 . 18984-10,$$

$$\log P_1 = 9 . 38208-10, \qquad \log pq = 9_n . 07481-10,$$

$$\log Q_1 = 8 . 89932-10, \qquad \log ps = 8_n . 71342-10,$$

$$\log S_1 = 8_n . 71044-10, \qquad \log q = 9_n . 88507-10,$$

$$\log s = 9_n . 52358-10.$$

Вычисляя съ этими данными z изъ уравненія (41), находимъ

---

[1]) N. Herz. Ueber die Möglichkeit... (Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. 1882, стр. 1131).

$$\log\left[s(l_1-q)-n_1\right]=9.61174,$$
$$\log\left[m_1-s-(l_1-q)q\right]=9.57597,$$
$$\log z=0.03577,$$
$$z=1.0859;$$

найденное значеніе весьма близко къ значенію $z=1.098$, найденному Н. Герцомъ [1]. А такъ какъ, кромѣ того, найденный общій корень уравненій (39) и (40) весьма близокъ къ наибольшему изъ трехъ корней уравненія (21), найденныхъ въ предыдущей главѣ, то наибольшій изъ корней уравненія (21) соотвѣтствуетъ истинной орбитѣ кометы, а два другіе положительные корня суть корни посторонніе для данной задачи. Надо обратить вниманіе здѣсь еще на слѣдующее обстоятельство: когда мы подставимъ

$$z=1.0859$$

въ трехчленъ

$$z^2+zq+s,$$

то получимъ

$$\log(z^2+qz+s)=8.07291-10$$

и

$$\log p\,(z^2+qz+s)=7.26275-10.$$

Изъ предыдущаго мы заключаемъ, что первый остатокъ отъ дѣленія лѣвой части уравненія (40) на лѣвую часть уравненія (39) есть малая величина. Это произошло какъ потому, что корень уравненія (41) весьма близокъ къ положительному корню трехчлена (второй корень трехчлена отрицательный, ибо $s<0$)

$$z^2+qz+s,$$

такъ и потому, что p малая величина. Въ виду этого лучше всего изслѣдовать непосредственно кубическое уравненіе (39). Это кубическое уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня между предѣлами 0.9 и 1.0 и между 1.0 и 1.1. Вычисляя по способу Ньютона приближенныя значенія этихъ корней, найдемъ 0.9049 и 1.097. Первый корень $z=0.9049$, будучи подставленъ соотвѣтственно въ уравненія (39) и (40), дастъ $+0.00003$ и -0.03228, а потому заключаемъ, что $z=0.9049$ не есть общій корень

[1]) См. тамъ же Ueber die Möglichkeit...

уравненій (39) и (40). Второй корень $z = 1.097$ близокъ къ найденному уже раньше корню 1.0859, но точнѣе послѣдняго, такъ какъ подстановка $z = 1.097$ соотвѣтственно въ уравненія (39) и (40) даетъ $+0.00056$ и $+0.00598$, подстановка же $z = 1.0859$ въ тѣ же уравненія даетъ -0.0017 и $+0.014$. Изъ этого заключаемъ, что общій корень уравненій (39) и (40) есть

$$z = 1.097.$$

IV.

Обобщеніе метода Лежандра.

Примѣнимъ теперь къ изслѣдованію уравненія (20) методъ Лежандра, указанный имъ лишь весьма кратко на стр. 20 его сочиненія: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes". Для этого положимъ

$$y^2 = a_1^2 \rho_1^2 - 2b_1 \rho_1 + c_1^2, \tag{42}$$

тогда уравненіе (20) мы можемъ написать слѣдующимъ образомъ:

$$y (a^2 \rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos\varphi + 1) = \frac{\tau_2^2}{g^2 \sqrt{2}} \cdot \tag{43}$$

Если въ уравненіяхъ (42) и (43) мы будемъ разсматривать ρ_1 и y какъ прямоугольныя Декартовы координаты точки, то каждое изъ предыдущихъ уравненій представитъ на плоскости координатъ (ρ_1, y) кривую, а число дѣйствительныхъ точекъ пересѣченія этихъ кривыхъ дастъ намъ число дѣйствительныхъ корней уравненія (20). Изслѣдуемъ теперь подробнѣе форму кривыхъ, выражаемыхъ уравненіями (42) и (43). Уравненіе (42) можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$y^2 = a_1^2 \left(\rho_1 - \frac{b_1}{a_1^2}\right)^2 + \frac{a_1^2 c_1^2 - b_1^2}{a_1^2}. \tag{44}$$

Подставивъ вмѣсто a_1, c_1 и b_1 ихъ значенія (11) въ двучленъ $a_1^2 b_1^2 - c_1^2$, получимъ

$$a_1^2 c_1^2 - b_1^2 = (1 + M^2)(R_1^2 + R_3^2) - (R_1 \cos\psi_1 + MR_3 \cos\psi_3)^2,$$

или

$$a_1^2 c_1^2 - b_1^2 = (1 + M^2)(R_1^2 \sin^2\psi_1 + R_3^2 \sin^2\psi_3) +$$
$$+ (1 + M^2)(R_1^2 \cos\psi_1 + R_3^2 \cos^2\psi_3) -$$
$$- R_1^2 \cos^2\psi_1 - 2M R_1 R_3 \cos\psi_1 \cos\psi_3 - M^2 R_3^2 \cos^2\psi_3.$$

Послѣ упрощеній получимъ

$$a_1^2 c_1^2 - b_1^2 = (1+M^2)(R_1^2 \sin^2\psi_1 + R_3^2 \sin^2\psi_3) + (R_3 \cos\psi_3 - MR_1 \cos\psi_1)^2 > 0,$$

а потому уравненіе (44) выражаетъ гиперболу, дѣйствительная ось которой направлена параллельно оси y, а центръ ея лежитъ на оси ρ_1; слѣдовательно эта гипербола расположена симметрично относительно оси ρ_1. Координаты вершинъ гиперболы будутъ слѣдующія:

$$\rho_1 = \frac{b_1}{a_1^2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{a_1^2 c_1^2 - b_1^2}}{a_1}. \tag{45}$$

Координаты же точекъ пересѣченія гиперболы (42) съ осью y будутъ

$$\rho_1 = 0; \quad y = \pm c_1. \tag{46}$$

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію формы кривой, выражаемой уравненіемъ (43). Для этой цѣли мы напишемъ уравненіе (43) въ слѣдующей формѣ:

$$y\left[(a\rho_1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi\right] = \frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}}. \tag{47}$$

Прежде всего изъ уравненія (47) мы видимъ, что кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, расположена по одну сторону отъ оси ρ_1 въ направленіи положительной оси y и симметрична относительно прямой, параллельной оси y и находящейся отъ послѣдней на разстояніи

$$\rho_1 = \frac{\cos\varphi}{a};$$

поэтому, принимая эту прямую за новую ось y и полагая

$$x = \rho_1 - \frac{\cos\varphi}{a},$$

мы приведемъ уравненіе (47) къ виду

$$y(a^2 x^2 + \sin^2\varphi) = \frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}}. \tag{48}$$

Изъ предыдущаго уравненія мы видимъ, что, вообще говоря, y не можетъ обратиться въ безконечность ни для какихъ дѣйствительныхъ значеній x, которыя мы только и будемъ разсматривать, какъ соотвѣтствующія нашей задачѣ [1]). Поэтому кривая (48) расположена на конечномъ

---

[1]) Мы предполагаемъ, что, вообще говоря, $\sin\varphi$ не обращается въ нуль.

разстояніи отъ оси $x(\rho_1)$. Когда $x=0$, а слѣдовательно

$$\rho_1 = \frac{\cos\varphi}{a},$$

то y будетъ maximum, а именно

$$y_{max.} = \frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}\,\sin^2\varphi}.$$

При $x = \pm\infty$, а слѣдовательно и при $\rho_1 = \pm\infty$

$$y = 0,$$

а потому ось $x(\rho_1)$ служитъ асимптотой кривой, выражаемой уравненіемъ (48).

При $\rho_1 = 0$ изъ уравненія (47) находимъ

$$y = \frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}},$$

это есть отрѣзокъ, отсѣкаемый кривой (47) на прежней оси y. Найдемъ теперь точки перегиба кривой (48). Какъ извѣстно для этой цѣли мы должны изъ уравненія (48) найти вторую производную отъ y по x, приравнять ее нулю и рѣшить относительно x полученное уравненіе. Изъ уравненія (48) легко находимъ

$$y' = -\frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}}\,\frac{2a^2x}{(a^2x^2+\sin^2\varphi)^2},$$

$$y'' = -\frac{2\tau_2^2a^2}{g^2\sqrt{2}}\,\frac{(a^2x^2+\sin^2\varphi)^2 - 4a^2x^2(a^2x^2+\sin^2\varphi)}{(a^2x^2+\sin^2\varphi)^4} = 0,$$

или

$$y'' = -\frac{2\tau_2^2a^2}{g^2\sqrt{2}}\,\frac{a^2x^2+\sin^2\varphi - 4a^2x^2}{(a^2x^2+\sin^2\varphi)^3} = 0,$$

или

$$\sin^2\varphi - 3a^2x^2 = 0,$$

откуда находимъ

$$x = \pm\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}},$$

слѣдовательно кривая (48) имѣетъ двѣ точки перегиба, симметрично расположенныя относительно новой оси y [1]). Интересно теперь изслѣдовать,

---

[1]) Кромѣ того вторая производная отъ y по x обращается еще въ нуль при $x = \pm\infty$, что соотвѣтствуетъ $y = 0$.

какъ эти точки перегиба будутъ расположены относительно прежней оси y. Для этого замѣтимъ, что

$$x = \rho_1 - \frac{\cos\varphi}{a},$$

поэтому для точекъ перегиба будемъ имѣть

$$\rho_1 = \frac{\cos\varphi}{a} \pm \frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}, \tag{49}$$

а ордината точекъ перегиба будетъ

$$y = \frac{3}{4}\,\frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}\,\sin^2\varphi}.$$

Такъ какъ a всегда положительно, то знакъ ρ_1 будетъ зависѣть отъ знака двучлена

$$\cos\varphi \pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Если обѣ точки перегиба кривой (47) лежатъ по одну сторону оси y въ направленіи положительной оси ρ_1, то должны выполняться слѣдующія неравенства:

$$\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} > 0,$$

$$\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} > 0,$$

или

$$\cot g\,\varphi > -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot g\,\varphi > \frac{1}{\sqrt{3}};$$

изъ послѣднихъ неравенствъ находимъ

$$\varphi < 120^0,$$

$$\varphi < 60^0;$$

послѣднія два неравенства сводятся къ одному

$$\varphi < 60^0,$$

при этомъ надо помнить, что

$$0 < \varphi < 180^0,$$

а потому всегда

$$\sin\varphi > 0.$$

Если выполняются неравенства

$$\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} > 0,$$

$$\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} < 0,$$

или

$$\cot g\,\varphi > -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot g\,\varphi < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

или

$$\varphi < 120^0,$$

$$\varphi > 60^0,$$

то точки перегиба кривой (47) будутъ лежать по разныя стороны оси y.

Если же

$$\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} < 0,$$

$$\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} < 0,$$

$$\cot g\,\varphi < -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot g\,\varphi < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

или

$$\varphi > 120^0,$$

$$\varphi > 60^0,$$

или

$$\varphi > 120^0,$$

то обѣ точки перегиба кривой (47) будутъ лежать по одну сторону оси y въ направленіи отрицательной оси ρ_1.

Для опредѣленія числа положительныхъ корней уравненія (20), будемъ опредѣлять число точекъ пересѣченія кривыхъ (44) и (47) въ пер-

вомъ углѣ. Замѣтимъ, что отрѣзокъ c_1, отсѣкаемый гиперболой (44) на положительной оси y близокъ къ $\sqrt{2}$, а отрѣзокъ $\frac{\tau_2^2}{g^2\sqrt{2}}$, отсѣкаемый кривой (47) на той же оси, близокъ къ $2\sqrt{2}$, а потому кривая (47) пересѣкаетъ ось y почти въ два раза дальше отъ начала координатъ, чѣмъ гипербола (44). Простое геометрическое построеніе убѣждаетъ насъ, что, если абсцисса вершинъ гиперболы больше меньшей абсциссы одной изъ точекъ перегиба кривой (47) и меньше абсциссы другой точки перегиба, т. е. если выполняются неравенства

$$\frac{\cos\varphi}{a}-\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}<\frac{b_1}{a_1^2}<\frac{\cos\varphi}{a}+\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}, \qquad (50)$$

то кривыя (44) и (47) пересѣкаются только въ двухъ точкахъ, изъ которыхъ одна точка имѣетъ положительную абсциссу, а другая точка—отрицательную абсциссу. Слѣдовательно, если выполняются неравенства (50), то уравненіе (20) имѣетъ только одинъ положительный корень. Если же неравенства (50) не выполняются, то, какъ легко видѣть изъ геометрическаго построенія кривыхъ (44) и (47), эти кривыя пересѣкаются или въ одной, или въ трехъ точкахъ, абсциссы которыхъ положительны, а потому въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе (20) имѣетъ или одинъ, или три положительныхъ корня. Если обѣ точки перегиба кривой (47) лежатъ въ первомъ углѣ, т. е., если

$$0<\varphi<60^0$$

и

$$\frac{b_1}{a_1^2}<\frac{\cos\varphi}{a}-\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}},$$

т. е., если вершина гиперболы имѣетъ абсциссу, меньшую абсциссы болѣе близкой къ оси y точки перегиба, то, въ случаѣ трехъ положительныхъ корней, эти корни заключены въ промежуткѣ отъ 0 до $\frac{\cos\varphi}{a}+\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}$. Если же при

$$0<\varphi<180^0$$

и

$$\frac{b_1}{a_1^2}>\frac{\cos\varphi}{a}+\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}},$$

то, въ случаѣ трехъ положительныхъ корней уравненія (20), эти корни заключены въ промежуткѣ отъ $\frac{\cos\varphi}{a}+\frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}$ до $+\infty$. Если же

$$60^0 < \varphi < 180^0$$

и

$$\frac{b_1}{a_1^2} < \frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}},$$

то уравненіе (20) будетъ имѣть только одинъ положительный корень. Изложенное обобщеніе метода Лежандра можетъ служить дополненіемъ къ предыдущимъ изслѣдованіямъ; по этому методу мы можемъ опредѣлить весьма простыми вычисленіями, будетъ ли уравненіе (20) имѣть только одинъ положительный корень, или же это уравненіе можетъ имѣть одинъ или три положительныхъ корня. Въ послѣднемъ случаѣ необходимо произвести изслѣдованіе задачи по способу Оппольцера или по способу Пикара. Что касается изслѣдованій самого Лежандра, то въ своемъ сочиненіи „Nouvelles méthodes... и т. д.“ на страницѣ 20 онъ говоритъ: „...donc puisque la première (hyperbole) s'eloigne à l'infini de l'axe, tandis que l'autre (curbe troisieme ordre) s'en rapproche de plus en plus à mesure que l'abscisse est plus grande, il s'ensuit que les deux courbes auront nécessairement une intersection dans le sens des abscisses positives et n'en auront qu'une. Ainsi la résolution des équations (35) et (36) aura encore l'avantage d'être toujours possible et de n'offrir aucune ambiguité“. Надо замѣтить, что уравненія (35) и (36) въ цитированномъ сочиненіи Лежандра отличаются только обозначеніями отъ нашихъ уравненій (42) и (43), а потому послѣднія уравненія легко привести къ виду уравненій Лежандра. Между тѣмъ въ приведенной цитатѣ Лежандръ утверждаетъ, что кривыя, выражаемыя этими уравненіями, всегда пересѣкаются только въ одной точкѣ, абсцисса которой положительна. Это заключеніе Лежандра противорѣчитъ не только предыдущимъ заключеніямъ, выведеннымъ по методу Лежандра, но и выводамъ Оппольцера. Лежандръ упустилъ изъ виду, что предыдущія кривыя могутъ быть такъ расположены другъ относительно друга, что пересѣкутся въ трехъ точкахъ съ положительными абсциссами, а потому Лежандръ пришелъ къ невѣрному заключенію, что задача о вычисленіи параболическихъ орбитъ всегда рѣшается однозначно.

Примѣнимъ теперь только что выведенные критеріи къ опредѣленію числа положительныхъ рѣшеній уравненія (20) для выше приведенныхъ трехъ наблюденій кометы Крульса. Для разсматриваемаго случая легко вычисляемъ

$$\varphi = 126^0.98,$$

а потому по предыдущему заключаемъ безъ всякихъ вычисленій, что обѣ точки перегиба кривой (47) лежатъ во второмъ углѣ, слѣдовательно абсциссы этихъ точекъ отрицательны, т. е.

$$\frac{\cos\varphi}{a} \pm \frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}} < 0,$$

но такъ какъ по предыдущему $b_1 > 0$, то

$$\frac{b_1}{a_1^2} > \frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}},$$

а потому уравненіе (20) имѣетъ или одинъ, или три положительныхъ корня и эти корни заключены между $\frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{a\sqrt{3}}$ и $+\infty$. Для того, чтобы окончательно рѣшить вопросъ о числѣ положительныхъ корней уравненія (20) необходимо воспользоваться способомъ Оппольцера, что и сдѣлано уже въ главѣ II-й.

V.

Выводъ уравненія для опредѣленія истиннаго геліоцентрическаго разстоянія кометы въ моментъ второго наблюденія.

Подставляя z изъ уравненія (35) въ уравненіе (36), получимъ

$$\alpha^2 m^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)^2 - 2\alpha m \cos\varphi \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 1 = \frac{\tau_2^2}{2g^2 R_2 \lambda},$$

или

$$\left[(\alpha m - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi\right]\lambda^6 - \frac{\tau_2^2}{2g^2 R_2}\lambda^5 - 2\alpha m(\alpha m - \cos\varphi)\lambda^3 + \alpha^2 m^2 = 0. \quad (51)$$

Полученное уравненіе (51) обладаетъ замѣчательными свойствами, которыя мы теперь изслѣдуемъ.

Замѣчая, что

$$(\alpha m - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi > 0.$$

$$\frac{\tau_2^2}{2g^2 R_2} > 0.$$

$$\alpha^2 m^2 > 0.$$

и примѣняя къ уравненію (51) правило Декарта, найдемъ, что какъ при

$$\alpha m(\alpha m - \cos\varphi) > 0,$$

такъ и при

$$\alpha m(\alpha m - \cos\varphi) < 0$$

въ лѣвой части уравненія (51) будетъ двѣ перемѣны знаковъ, а потому заключаемъ, что уравненіе (51) имѣетъ или два положительныхъ корня, или же не имѣетъ ни одного положительнаго корня. Если примемъ во

вниманіе формулу (19), то найдемъ, что

$$\frac{\tau_2^2}{2g^2R_2}$$

близко къ $2R_2$ или къ 2, такъ какъ R_2 близко къ единицѣ.

Подставляя затѣмъ въ уравненіе (51)

$$\lambda = 0, \quad 1, \quad +\infty,$$

соотвѣтственно получимъ

$$\alpha^2 m^2, \quad 1 - \frac{\tau_2^2}{2g^2R_2}, \quad +\infty.$$

Такъ какъ

$$\alpha^2 m^2 > 0, \quad \text{а} \quad 1 - \frac{\tau_2^2}{2g^2R_2} < 0,$$

то въ каждомъ изъ промежутковъ 0 и 1 и 1 и $+\infty$ заключается нечетное число корней уравненія (51), но, такъ какъ по правилу Декарта число положительныхъ корней уравненія (51) не болѣе двухъ, то въ каждомъ изъ предыдущихъ промежутковъ заключается по одному корню уравненія (51).

Такъ какъ кромѣ того z, опредѣляемое изъ уравненія (35), по смыслу задачи должно быть положительно, то при

$$m < 0$$

истинной орбитѣ кометы соотвѣтствуетъ корень уравненія (51), находящійся между 0 и 1, а при

$$m > 0$$

истинной орбитѣ кометы соотвѣтствуетъ корень уравненія (51), находящійся между 1 и $+\infty$. Всѣ вышеизложенныя замѣчательныя свойства уравненія (51) привели насъ къ заключенію, что это уравненіе всегда имѣетъ два положительныхъ корня, при чемъ по знаку m легко заключить, какой изъ этихъ двухъ корней соотвѣтствуетъ истинной орбитѣ кометы, а потому, въ случаѣ трехъ положительныхъ корней уравненія (20), мы можемъ выбрать изъ нихъ корень, соотвѣтствующій истинной орбитѣ кометы, подставляя найденныя три значенія λ въ уравненіе (51); значеніе λ, лучше всего удовлетворяющее уравненію (51), будетъ искомое. Примѣнимъ предыдущія соображенія къ выбору изъ трехъ положительныхъ корней уравненія (20), найденныхъ во второй главѣ при вычисленіи орбиты кометы Крульса, одного корня, соотвѣтствующаго истинной орбитѣ кометы. Мы имѣемъ

$$lg\,a = 0.44267;\quad lg\,m = 7_n.54798-10,\quad lg\,\frac{\tau_2^2}{2g^2R_2} = 0.30268,$$

$$lg\,cos\,\varphi = 9_n.77927-10,\quad lg\,am = 7_n.99065-10,$$

$$lg\left[(am-cos\,\varphi)^2+sin^2\varphi\right] = 9.99489-10,$$

$$lg\,2am\,(am-cos\,\varphi) = 8_n.06382-10,$$

$$lg\,a^2m^2 = 5.98130-10.$$

Отбрасывая малыя величины перваго порядка, легко находимъ:

	I корень.	II корень.	III корень.
$lg\,\lambda$	9.80769—10,	9.42034—10,	9.18093—10.

Подставивъ соотвѣтствующія значенія корней вмѣсто λ въ уравненіе (51) и произведя вычисленіе, получимъ въ лѣвой части уравненія:

I корень.	II корень.	III корень.
—0.14683	—0.0019	—0 00001.

На основаніи предыдущаго заключаемъ, что третій корень лучше двухъ другихъ удовлетворяетъ уравненію (51), а потому онъ соотвѣтствуетъ истинной орбитѣ кометы Крульса, корни же первый и второй соотвѣтствуютъ орбитамъ, чуждымъ нашей задачѣ.

VI.

Общее заключеніе.

Если бы мы изъ четырехъ уравненій (1) съ четырьмя неизвѣстными ρ_1, r_1, r_3 и s исключили три неизвѣстныхъ r_1, r_3 и s, то получили бы одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ ρ_1. Это уравненіе было бы очень высокой степени, а потому мы à priori можемъ заключить, что задача о вычисленіи параболическихъ орбитъ, изъ условія которой выведено послѣднее уравненіе, можетъ допускать нѣсколько рѣшеній. Вмѣсто выше упомянутаго уравненія высокой степени, мы пользуемся при вычисленіи положительныхъ корней системы уравненій (1) приближеннымъ уравненіемъ (20), точнымъ до величинъ перваго порядка включительно; при этомъ, пренебрегая малыми величинами выше перваго порядка, мы понизили степень разрѣшающаго уравненія до шестой и этимъ упростили рѣшеніе задачи, такъ какъ корень, соотвѣтствующій истинной орбитѣ кометы, сохранился въ уравненіи (20), нѣкоторые же посторонніе нашей задачѣ корни могли выпасть изъ разрѣшающаго уравненія. Постараемся теперь выяснить причину, почему общая задача о вычисленіи орбитъ безъ ограниченія относительно эксцентриситета допускаетъ не болѣе двухъ рѣшеній, а новая задача, получающаяся изъ предыдущей задачи добавленіемъ ограниченія относительно эксцентриситета ($e = 1$), допускаетъ одно или три рѣшенія. Казалось бы, что введеніе въ условіе задачи ограниченія относительно эксцентриситета должно привести къ однозначному рѣшенію задачи. Для выясненія этого интереснаго обстоятельства замѣтимъ, что общая задача о вычисленіи орбитъ безъ ограниченія относительно эксцентриситета, приводится къ рѣшенію системы слѣдующихъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными [1]):

---

[1]) Th. Oppolzer. Lehrbuch. Bd. I, p. 362.

$$z = m\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right),$$

$$\lambda^2 = z^2 - 2z\cos\psi_2 + 1,$$

изъ которыхъ первое точно до членовъ перваго порядка включительно. Въ задачѣ же о вычисленіи параболическихъ орбитъ первое изъ предыдущихъ уравненій замѣняется по Оппольцеру уравненіемъ

$$a^2z^2 - 2az\cos\varphi + 1 = \frac{\tau_2^2}{2g^2 R_2 \lambda},$$

которое точно до величинъ перваго порядка исключительно. Мы же замѣнили уравненіе общей задачи

$$z = m\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)$$

уравненіемъ

$$s = \frac{\tau_2}{\sqrt{r_1 + r_3}};$$

подставивъ значеніе s изъ уравненій (1) въ предыдущее уравненіе, получимъ уравненіе

$$\sqrt{(h\rho_1 - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi} = \frac{\tau_2}{\sqrt{r_1 + r_3}},$$

которое точно до членовъ второго порядка включительно. Уравненіе же общей задачи

$$\lambda^2 = z^2 - 2z\cos\psi_2 + 1$$

мы замѣнили уравненіемъ

$$r_1 + r_3 = \sqrt{2}\sqrt{a_1^2\rho_1^2 - 2b_1\rho_1 + c_1^2},$$

которое точно до членовъ перваго порядка включительно. Полученная нами система уравненій точнѣе системы уравненій Оппольцера, но, какъ показало предыдущее изслѣдованіе, число положительныхъ корней въ обѣихъ системахъ одинаково. Этого, конечно, и слѣдовало ожидать, такъ какъ, увеличивая точность разрѣшающаго уравненія, мы не измѣнили его степени. Разрѣшающее уравненіе восьмой степени общей задачи о вычисленіи орбитъ, какъ извѣстно, имѣетъ не болѣе трехъ положительныхъ корней, изъ которыхъ одинъ корень соотвѣтствуетъ земной орбитѣ, такъ какъ всѣмъ условіямъ задачи при извѣстныхъ условіяхъ удовлетворяетъ движеніе земли, а потому общая задача допускаетъ не болѣе двухъ рѣшеній. Когда мы ввели въ главѣ V-ой въ общую задачу о вычисленіи орбитъ условіе,

что свѣтило движется по параболѣ, то мы получили разрѣшающее уравненіе (51), которое имѣетъ только одинъ положительный корень, удовлетворяющій задачѣ, а это заключеніе вполнѣ согласно съ тѣмъ, чего мы могли ожидать, вводя ограниченіе относительно эксцентриситета въ общую задачу о вычисленіи орбитъ. Остается теперь выяснить, почему при рѣшеніи задачи по способу Ольберса мы получаемъ иногда три орбиты, удовлетворящихъ задачѣ. Причина этого обстоятельства, какъ намъ кажется, заключается въ томъ, что въ способѣ Ольберса мы приходимъ къ рѣшенію задачи совершенно инымъ путемъ, чѣмъ въ общей задачѣ о вычисленіи орбитъ. Въ способѣ Ольберса мы пользуемся уравненіемъ Эйлера и нѣтъ основаній предполагать, что при такомъ способѣ рѣшенія задачи разрѣшающее уравненіе частной задачи будетъ имѣть не болѣе двухъ положительныхъ корней, удовлетворяющихъ задачѣ. Если бы при рѣшеніи общей задачи мы могли пользоваться уравненіемъ Ламберта, то разрѣшающее уравненіе, полученное при этомъ условіи, имѣло бы навѣрное не менѣе корней, удовлетворяющихъ задачѣ, чѣмъ разрѣшающее уравненіе частной задачи о вычисленіи параболическихъ орбитъ. Тогда, дѣйствительно, мы имѣли бы полную аналогію въ рѣшеніи общей и частной задачъ. Но, такъ какъ при рѣшеніи общей задачи мы не пользуемся уравненіемъ Ламберта, то нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что частная задача имѣетъ больше рѣшеній, чѣмъ общая. Выше изложенныя изслѣдованія приводятъ насъ къ заключенію, что три рѣшенія, получающіяся иногда при вычисленіи параболическихъ орбитъ по способу Ольберса, суть слѣдствія аналитическихъ свойствъ основныхъ уравненій способа Ольберса.

ЛИТЕРАТУРА.

D. du Séjour. Traite annalytique des mouvemens apparens des corps célestes. t. II. 1789.

J. H. Lambert. Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen. Leipzig. 1902.

Laplace. Mécanique céleste. Livre II.

Lagrange. Sur le probléme de la détermination des orbites des comètes d'apres trois observations. Oeuvres. T. IV. pp. 439—532.

W. Olbers. Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. Weimar. 1797.

A. M. Legendre. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes; avec supplément contenant divers perfectionnements des ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805. Paris. 1806.

C. F. Gauss. Beobachtungen des zweiten Cometen vom Jahre 1813, angestellt auf der Sternwarte zu Göttingen, nebst einigen Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen. Zach's Monatliche Correspondenz. Bd. 28, p. 501. 1813.

J. F. Encke. Ueber die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Cometenbahnen. B. J. 1833.

Augustin Cauchy. Oeuvres complètes. 1-re serie. Tome X. Paris. 1897.

Th. Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. I Bd. Leipzig. 1882.

H. Oppenheim. Ueber die Bahnberechnung des Cometen Cruls. A. N. № 2464.

Th. Oppolzer. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenprobleme. (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. LXXXVI Band. IV Heft. Zweite Abtheilung. 1882).

Th. Oppolzer. Ueber eine dreifache Lösung des Cometenproblems. A. N. № 2468.

— Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Cometenproblem. A. N. № 2468.

N. Hertz. Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen. (Sitzungsb. der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. LXXXVI Bd. V Heft. 1882.

E. Weiss. Ueber die Bestimmnng von *M* bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. (Sitzungsb. der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. XCII. Dec. Heft. 1885).

Callandreau. Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes.

Ern. Pasquier. Sur les solutions multiples du problème des comètes. (Bulletin de l'Akadémie royale des sciences, des lettres et des beaux-artes de Belgique. 66-me année. 3-me serie, tome XXXII. 1896. Bruxelles).

L. Picart. Sur la suppression des essais dans le calcul des orbites paraboliques. (Bulletin Astronomique. Tome XVI. Novembre 1899).

F. Tisserand. Leçons sur la détermination des orbites. Paris. 1899.

